Desigualdades de tipo débil pesado para operadores maximales unilaterales generales en espacios de Lebesgue con exponentes variables

R. Crescimbeni   C. Ferrari Freire   D. Szylo

Universidad Nacional del Comahue

Sesión: Análisis - XVII Congreso Dr. Antonio Monteiro

Promedios ergódicos

La Teoría ergódica estudia el comportamiento de sistemas dinámicos. Para analizar el comportamiento promedio de observaciones de un sistema, a medida que avanza el tiempo, se estudian los promedios ergódicos.

- $T : X \to X$ una transformación inversible que preserva la medida
- $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible.

Promedios ergódicos

La Teoría ergódica estudia el comportamiento de sistemas dinámicos. Para analizar el comportamiento promedio de observaciones de un sistema, a medida que avanza el tiempo, se estudian los promedios ergódicos.

Sean

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito
- $T : X \to X$ una transformación inversible que preserva la medida
- $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible.

Promedios ergódicos

La Teoría ergódica estudia el comportamiento de sistemas dinámicos. Para analizar el comportamiento promedio de observaciones de un sistema, a medida que avanza el tiempo, se estudian los promedios ergódicos.

Sean

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito
- $T : X \to X$ una transformación inversible que preserva la medida
- $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible.

Promedios ergódicos

La Teoría ergódica estudia el comportamiento de sistemas dinámicos. Para analizar el comportamiento promedio de observaciones de un sistema, a medida que avanza el tiempo, se estudian los promedios ergódicos.

Sean

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito
- $T : X \to X$ una transformación inversible que preserva la medida Esto es, si $E \subset X$ es medible $\Rightarrow$ $T^{-1}(E)$ también lo es y además $\mu(T^{-1}(E)) = \mu(E)$
- $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible.

Promedios ergódicos

La Teoría ergódica estudia el comportamiento de sistemas dinámicos. Para analizar el comportamiento promedio de observaciones de un sistema, a medida que avanza el tiempo, se estudian los promedios ergódicos.

Sean

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito
- $T : X \to X$ una transformación inversible que preserva la medida
- $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible.

Promedios ergódicos

La Teoría ergódica estudia el comportamiento de sistemas dinámicos. Para analizar el comportamiento promedio de observaciones de un sistema, a medida que avanza el tiempo, se estudian los promedios ergódicos.

Sean

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito
- $T : X \to X$ una transformación inversible que preserva la medida
- $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible.

Dado $n \in \mathbb{N}$, el promedio ergódico de longitud $n + 1$ para f es

$$R_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(T^i x).$$

Promedios ergódicos

- Operador maximal ergódico

$$M_T^+ f(x) = \sup_n R_n|f|(x).$$

Promedios ergódicos

- Operador maximal ergódico

$$M_T^+ f(x) = \sup_n R_n|f|(x).$$

Resultados conocidos:

- Teorema Ergódico de Birkhoff [1939]:
  $\{R_n f\}$ converge en ctp para toda $f \in L^p(d\mu)$, $1 \leq p < \infty$.

- Operador maximal ergódico

$$M_T^+ f(x) = \sup_n R_n |f|(x).$$

Resultados conocidos:

- Teorema Ergódico de Birkhoff [1939]:
  $\{R_n f\}$ converge en ctp para toda $f \in L^p(d\mu)$, $1 \leq p < \infty$.
- Atencia y De la Torre [1982]:
  Convergencia en ctp de $\{R_n f\}$ para $f \in L^p(w d\mu)$, $w \in A_p$.

Promedios ergódicos

- Operador maximal ergódico

$$M_T^+ f(x) = \sup_n R_n|f|(x).$$

Resultados conocidos:

- Teorema Ergódico de Birkhoff [1939]:
  $\{R_n f\}$ converge en ctp para toda $f \in L^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$.
- Atencia y De la Torre [1982]:
  Convergencia en ctp de $\{R_n f\}$ para $f \in L^p(w d\mu)$, $w \in A_p$.
- Fernández-Cabrera y Martín-Reyes [1995]:
  Convergencia en ctp de $\{R_n f\}$ para $f \in L^p(w d\mu)$, $w \in A_p^+(T)$

Promedios ergódicos

- Operador maximal ergódico

$$M_T^+ f(x) = \sup_n R_n|f|(x).$$

Resultados conocidos:

- Teorema Ergódico de Birkhoff [1939]:
  $\{R_n f\}$ converge en ctp para toda $f \in L^p(d\mu)$, $1 \leq p < \infty$.
- Atencia y De la Torre [1982]:
  Convergencia en ctp de $\{R_n f\}$ para $f \in L^p(w d\mu)$, $w \in A_p$.
- Fernández-Cabrera y Martín-Reyes [1995]:
  Convergencia en ctp de $\{R_n f\}$ para $f \in L^p(w d\mu)$, $w \in A_p^+(T)$
  ie, existe $C > 0$ tal que para todo $0 \leq k \leq r$ y casi todo $x \in X$ se verifica

$$\left(\sum_{j=0}^{k} u(T^j x)\right)^{1/p} \left(\sum_{j=k}^{r} v^{1-p'}(T^j x)\right)^{1/p'} \leq C(r+1) \qquad \text{si } p > 1$$

- Operador maximal ergódico

$$M_T^+ f(x) = \sup_n R_n|f|(x).$$

Resultados conocidos:

- Teorema Ergódico de Birkhoff [1939]:
  $\{R_n f\}$ converge en ctp para toda $f \in L^p(d\mu)$, $1 \leq p < \infty$.
- Atencia y De la Torre [1982]:
  Convergencia en ctp de $\{R_n f\}$ para $f \in L^p(wd\mu)$, $w \in A_p$.
- Fernández-Cabrera y Martín-Reyes [1995]:
  Convergencia en ctp de $\{R_n f\}$ para $f \in L^p(wd\mu)$, $w \in A_p^+(T)$
  o

$$\sum_{j=0}^{k} u(T^j x)\left(\max_{k\leq j\leq r} v^{-1}(T^j x)\right) \leq C(r+1) \qquad \text{si } p = 1.$$

Promedios ergódicos Cesàro-α

$$R_{n,\alpha}f(x) = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{i=0}^{n} A_{n-i}^{\alpha-1} f(T^i x)$$

con $0 < \alpha \leq 1$, y los números de Cesàro definidos como

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{n!} \quad \text{y} \quad A_n^0 = 1.$$

Promedios ergódicos Cesàro-α

$$R_{n,\alpha}f(x) = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{i=0}^{n} A_{n-i}^{\alpha-1} f(T^i x)$$

con $0 < \alpha \leq 1$, y los números de Cesàro definidos como

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{n!} \quad \text{y} \quad A_n^0 = 1.$$

Operador maximal ergódico Cesàro-α

$$M_{T,\alpha}^{+} f = \sup_{n\in\mathbb{N}} |R_{n,\alpha} f|.$$

Teorema [Martín-Reyes, Sarrión Gavilán (1999)]

Sean

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito
- $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha \leq 1$.
- T un operador Lamperti positivo inversible sobre $L^p(\mu)$

Teorema [Martín-Reyes, Sarrión Gavilán (1999)]

Sean

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito
- $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha \leq 1$.
- T un operador Lamperti positivo inversible sobre $L^p(\mu)$
  Un operador lineal acotado sobre L^p, $1 \leq p < \infty$, que separa soportes

Teorema [Martín-Reyes, Sarrión Gavilán (1999)]

Sean

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito
- $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha \leq 1$.
- T un operador Lamperti positivo inversible sobre $L^p(\mu)$

Entonces,

i) El operador maximal $M^+_{T,\alpha}$ es acotado en $L^p(\mu)$.

ii) Para toda $f \in L^p(\mu)$ los promedios $R_{n,\alpha} f$ convergen en casi todo punto y en norma $L^p(\mu)$.

Espacios Lebesgue variables pesados

Si w y p son funciones medibles positivas sobre X y $p(x) \geq 1$ para todo $x \in X$,

Espacios Lebesgue variables pesados

Si w y p son funciones medibles positivas sobre X y $p(x) \geq 1$ para todo $x \in X$,

Espacio de Lebesgue variable pesado $L^{p(\cdot)}(wd\mu)$

$$L^{p(\cdot)}(wd\mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \ : \ \int_X |f(x)|^{p(x)} w(x) d\mu < \infty \right\}.$$

Si w y p son funciones medibles positivas sobre X y $p(x) \geq 1$ para todo $x \in X$,

Espacio de Lebesgue variable pesado $L^{p(\cdot)}(wd\mu)$

$$L^{p(\cdot)}(wd\mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \ : \ \int_X |f(x)|^{p(x)} w(x) d\mu < \infty \right\}.$$

Dotado con la norma Luxemburgo

$$||f||_{L^{p(\cdot)}(wd\mu)} = \inf \left\{ \lambda > 0 \ : \ \int_X \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} w(x) d\mu \leq 1 \right\},$$

$L^{p(\cdot)}(wd\mu)$ se convierte en un espacio de Banach.

Teorema [Aguilar Cañestro - Ortega Salvador (2009)]

Sean

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito
- $p : X \to [1, \infty)$
- $T : X \to X$ una transformación inversible que preserva la medida
- u, v funciones medibles positivas sobre X.

Consideremos las siguientes afirmaciones.

i) Existe $C > 0$ tal que, para toda f y para todo λ, se verifica

$$\int_{\{x \in X : M_T^+ f(x) > \lambda\}} u d\mu \leq \int_X \left(\frac{C|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} v(x) d\mu.$$

ii) El par (u, v) verifica la condición $A^+_{p(\cdot)}(T)$.

Entonces
$ii) \Rightarrow i)$ y, si T es ergódico, se verifica la equivalencia.

Teorema [Aguilar Cañestro - Ortega Salvador (2009)]

Sean

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito
- $p : X \to [1, \infty)$
- $T : X \to X$ una transformación inversible que preserva la medida
- u, v funciones medibles positivas sobre X.

Consideremos las siguientes afirmaciones.

i) Existe $C > 0$ tal que, para toda f y para todo λ, se verifica

$$\int_{\{x \in X : M_T^+ f(x) > \lambda\}} u d\mu \leq \int_X \left(\frac{C|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} v(x) d\mu.$$

ii) El par (u, v) verifica la condición $A_{p(\cdot)}^+(T)$.

Entonces
ii) $\Rightarrow$ *i*) y, si T es ergódico, se verifica la equivalencia. T es ergódico si cuando E es medible e invariante bajo T entonces E o E^C tienen medida cero

Clases $A^+_{p(\cdot)}(T)$

Sean (u,v) funciones medibles positivas sobre X. Diremos que $(u,v)\in A^+_{p(\cdot)}(T)$ si existe $C>0$ tal que para todo $0\le k\le r$ y para casi todo $x\in X$, se verifican

$$\sum_{j\in P_2^{k,r}(x)}\left(\frac{1}{C(r+1)}\right)^{p'(T^jx)}\left(\frac{\sum_{m=0}^{k}u(T^mx)}{v(T^jx)}\right)^{p'(T^jx)-1}\le 1$$

y

$$\frac{1}{C(r+1)}\left(\max_{j\in P_1^{k,r}(x)} v^{-1}(T^jx)\right)\sum_{j=0}^{k}u(T^jx)\le 1,$$

donde $P_1^{k,r}(x)=\{j\in[k,r]:p(T^jx)=1\}$ y $P_2^{k,r}(x)=\{j\in[k,r]:p(T^jx)>1\}$.

Promedios ergódicos en $L^{p(\cdot)}(wd\mu)$

Teorema (Aguilar Cañestro - Ortega Salvador [2009])

Sean

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito
- $p : X \to [1, \infty)$ una función medible tal que $\sup_{x \in X} p(x) < \infty$
- $T : X \to X$ una transformación inversible que preserva la medida
- w una función medible positiva para la cual existe u tal que $(u, w) \in A^+_{p(\cdot)}(T)$.

Entonces la sucesión $\{R_n f\}$ converge en ctp para toda $f \in L^{p(\cdot)}(wd\mu)$.

Teorema (Aguilar Cañestro - Ortega Salvador [2009])

Sean

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito
- $p : X \to [1, \infty)$ una función medible tal que $\sup_{x \in X} p(x) < \infty$
- $T : X \to X$ una transformación inversible que preserva la medida
- w una función medible positiva para la cual existe u tal que $(u, w) \in A^{+}_{p(\cdot)}(T)$.

Entonces la sucesión $\{R_n f\}$ converge en ctp para toda $f \in L^{p(\cdot)}(wd\mu)$.

Corolario

Si $\sup_{x \in X} p(x) < \infty$ y $w \in A^{+}_{p(\cdot)}(T)$, entonces la sucesión $\{R_n f\}$ converge en ctp para toda $f \in L^{p(\cdot)}(wd\mu)$.

Objetivo:

Obtener resultados sobre convergencia de los promedios ergódicos Cesàro-α en $L^{p(\cdot)}(wd\mu)$.

Objetivo:

Obtener resultados sobre convergencia de los promedios ergódicos Cesàro-α en $L^{p(\cdot)}(wd\mu)$.

- Siguiendo las ideas de Aguilar Cañestro - Ortega Salvador.

Objetivo:

Obtener resultados sobre convergencia de los promedios ergódicos Cesàro-α en $L^{p(\cdot)}(wd\mu)$.

- Siguiendo las ideas de Aguilar Cañestro - Ortega Salvador.
- Trabajando con un operador maximal más general.

Operadores maximales unilaterales generales

Definición 1

Sea f una función real localmente integrable y sean h y k funciones medibles positivas definidas sobre $\{(x,y) : x < y\}$ y $\{(x,y,z) : x < y < z\}$ respectivamente. Si la función $s \mapsto k(x,s,y)$ es localmente integrable sobre (x,y) para cualquier $x < y$, definimos el operador maximal

$$M^{+}_{h,k} f(x) = \sup_{c>x} h(x,c) \int_x^c |f(s)| k(x,s,c) ds.$$

Teorema [Martín-Reyes, De la Torre (1997)]

Para $1 \leq p, q < \infty$, consideremos las siguientes condiciones:

a) Existe una constante C tal que para cualquier $f \in L^p(v)$,

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^q u\left(\{x : M^+_{h,k} f(x) > \lambda\}\right) \leq C \left(\int |f|^p v\right)^{q/p}.$$

b) El par (u, v) pertenece a $A^+_{p,q,h,k}$, es decir, existe una constante C tal que para cualesquiera $a < b < c$,

$$h(a,c)\left(\int_a^b u\right)^{1/q}\left(\int_b^c v^{1-p'}(s)k^{p'}(a,s,c)ds\right)^{1/p'} \leq C \qquad \text{si} \quad p > 1$$

y

$$h(a,c)\left(\int_a^b u\right)^{1/q} \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{s\in(b,c)} v(s)k^{-1}(a,s,c) \qquad \text{si} \quad p = 1.$$

Si h y k son crecientes en la primer variable entonces (a)$\Rightarrow$(b). Si h y k decrecen en su última variable y $p < q$, entonces (b)$\Rightarrow$(a).

Teorema 1

Sean

- $p : \mathbb{R} \to [1, \infty)$.
- u, v funciones medibles positivas sobre $\mathbb{R}$.

Consideremos las siguientes afirmaciones.

a) Existe $K > 0$ tal que

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}:\ M^{+}_{h,k}f(x)>\lambda\}} u \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{Kf(x)}{\lambda}\right)^{p(x)} v(x)dx$$

se cumple para toda $f \geq 0$ y para todo $\lambda > 0$.

b) El par (u, v) verifica la condición $A^{+}_{p(\cdot),h,k}$.

Si h y k son crecientes en la primer variable entonces (a)$\Rightarrow$(b). Si h y k decrecen en su última variable, entonces (b)$\Rightarrow$(a).

Clases $A^+_{p(\cdot),h,k}$

Sean $p:(a,c)\to[1,\infty)$ y sean u, v funciones medibles positivas sobre (a,c). Decimos que $(u,v)\in A^+_{p(\cdot),h,k}$ si existe $K>0$ tal que si $a<b<c$ entonces

$$h(a,c)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{s\in P_1\cap(b,c)} v^{-1}(s)k(a,s,c)\right)\int_a^b u\leq K$$

y

$$\int_{P_2\cap(b,c)}\left(\frac{h(a,c)k(a,s,c)}{K}\right)^{p'(s)}\left(\frac{\int_a^b u}{v(s)}\right)^{p'(s)-1} ds\leq 1,$$

donde $P_1=\{x\in(a,c): p(x)=1\}$, $P_2=\{x\in(a,c): p(x)>1\}$ y $p'(\cdot)$ es el exponente conjugado de $p(\cdot)$.

Idea de la demostración

Idea de la demostración

- Se define el operador T (del estilo Hardy generalizado)

Idea de la demostración

- Se define el operador T (del estilo Hardy generalizado)

Definición

Sean $-\infty \leq a < c \leq \infty$, $h(x,c)$, $k(x,s,c)$ como en la Definición 1, crecientes en la primer variable y decrecientes en la última variable. Definimos el operador T para funciones no negativas sobre (a,c) como

$$Tf(x) = h(x,c)\int_x^c f(s)k(x,s,c)ds.$$

- Se prueba el siguiente resultado para T.

Teorema 2

Sean $p:(a,c)\to[1,\infty)$ y sean u, v funciones medibles positivas sobre (a,c). Son equivalentes:

a) Existe $K>0$ tal que

$$\int_{\{x\in(a,c):\ Tf(x)>\lambda\}} u \le \int_a^c \left(\frac{Kf(x)}{\lambda}\right)^{p(x)} v(x)dx.$$

se cumple para toda $f\ge 0$ y para todo $\lambda>0$.

b) El par (u,v) verifica la condición $A^+_{p(\cdot),h,k}$.

- Se prueba el siguiente resultado para T.

Teorema 2

Sean $p : (a,c) \to [1,\infty)$ y sean u, v funciones medibles positivas sobre (a,c). Son equivalentes:

a) Existe $K > 0$ tal que

$$\int_{\{x\in(a,c):\ Tf(x)>\lambda\}} u \leq \int_a^c \left(\frac{Kf(x)}{\lambda}\right)^{p(x)} v(x)dx.$$

se cumple para toda $f \geq 0$ y para todo $\lambda > 0$.

b) El par (u,v) verifica la condición $A^+_{p(\cdot),h,k}$.

- Aplicando el resultado anterior se obtiene la conclusión del teorema.

Caso particular: Si $h(x,c) = (c-x)^{-\alpha}$, $k(x,s,c) = (c-s)^{\alpha-1}$, $0 < \alpha \leq 1$, obtenemos el operador maximal Cesàro-α

$$M_\alpha^+ f(x) = \sup_{c>x} \frac{1}{(c-x)^\alpha} \int_x^c \frac{|f(s)|}{(c-s)^{1-\alpha}} ds.$$

Caso particular: Si $h(x,c) = (c-x)^{-\alpha}$, $k(x,s,c) = (c-s)^{\alpha-1}$, $0 < \alpha \leq 1$, obtenemos el operador maximal Cesàro-α

$$M_\alpha^+ f(x) = \sup_{c>x} \frac{1}{(c-x)^\alpha} \int_x^c \frac{|f(s)|}{(c-s)^{1-\alpha}} ds.$$

Teorema 3

Sean $p : \mathbb{R} \to [1,\infty)$. Sean u, v funciones medibles positivas sobre $\mathbb{R}$. Son equivalentes:

a) Existe $K > 0$ tal que

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}: M_\alpha^+ f(x) > \lambda\}} u \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{K|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} v(x)dx$$

se cumple para toda f y para todo $\lambda > 0$.

b) El par (u,v) verifica la condición $A^+_{p(\cdot),\alpha}$.

Clases $A^+_{p(\cdot),\alpha}$

Sean u, v funciones medibles positivas sobre (a, c). Diremos que $(u, v) \in A^+_{p(\cdot),\alpha}$ si existe $K > 0$ tal que si $a < b < c$ entonces

$$\frac{1}{(c-a)^\alpha}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{s\in P_1\cap(b,c)} v^{-1}(s)(c-s)^{\alpha-1}\right)\int_a^b u \le K$$

y

$$\int_{P_2\cap(b,c)}\left(\frac{1}{K(c-a)^\alpha(c-s)^{1-\alpha}}\right)^{p'(s)}\left(\frac{\int_a^b u}{v(s)}\right)^{p'(s)-1} ds \le 1,$$

donde $P_1 = \{x \in (a, c) : p(x) = 1\}$, $P_2 = \{x \in (a, c) : p(x) > 1\}$

Observación 1: Si p es constante y $\alpha = 1$, las clases $A^+_{p(\cdot),\alpha}$ coinciden con las clases A^+_p clásicas.

Observación 1: Si p es constante y $\alpha = 1$, las clases $A^+_{p(\cdot),\alpha}$ coinciden con las clases A^+_p clásicas.

Observación 2: Si p es constante, tenemos que la condición $A^+_{p,\alpha}$ resulta

$$\frac{1}{K(c-a)^{\alpha p'}}\left(\int_b^c \frac{v(s)^{1-p'}}{(c-s)^{(1-\alpha)p'}}\right)\left(\int_a^b u\right)^{p'-1} \leq 1.$$

Como la función $\dfrac{1}{(c-s)^{(1-\alpha)p'}}$ tiene que ser localmente integrable cerca de c, el exponente $(1-\alpha)p'$ debe ser menor que 1, lo que significa que $p > 1/\alpha$. Es decir, para el caso de exponentes constantes, el teorema anterior se verifica si $p > 1/\alpha$.

Operador maximal discreto unilateral

$$m_\alpha^+ a(i) = \sup_{n\geq 0} \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=0}^{n} \left| A_{n-j}^{\alpha-1} a(i+j) \right| .$$

Operador maximal discreto unilateral

$$m_\alpha^+ a(i) = \sup_{n\geq 0} \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=0}^{n} \left| A_{n-j}^{\alpha-1} a(i+j) \right|.$$

Teorema 4

Sean u, v funciones positivas definidas sobre $\mathbb{Z}$ y sea $p : \mathbb{Z} \to [1, +\infty)$. Para todo $i \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq k \leq r$, son equivalentes:

a) Existe $C > 0$ tal que

$$\sum_{\{i : m_\alpha^+ f(i) > \lambda\}} u(i) \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{C|f(k)|}{\lambda} \right)^{p(k)} v(k)$$

se cumple para toda f y para todo $\lambda > 0$.

b) El par (u, v) verifica la condición $A_{p(\cdot),\alpha}^+(\mathbb{Z})$.

Clases $A^{+}_{p(\cdot),\alpha}(\mathbb{Z})$

Sean u, v funciones medibles positivas definidas sobre $\mathbb{Z}$. Diremos que $(u,v) \in A^{+}_{p(\cdot),\alpha}(\mathbb{Z})$ si existe $C > 0$ tal que si $0 \leq k \leq r$ entonces las desigualdades

$$\sum_{j \in P_2^{k,r}(i)} \left(\frac{A_{r-j}^{\alpha-1}}{CA_r^{\alpha}} \right)^{p'(i+j)} \left(\frac{\sum_{m=0}^{k} u(m+i)}{v(i+j)} \right)^{p'(i+j)-1} \leq 1$$

y

$$\frac{1}{CA_r^{\alpha}} \left(\max_{j \in P_1^{k,r}(i)} v^{-1}(i+j) A_{r-j}^{\alpha-1} \right) \sum_{j=0}^{k} u(i+j) \leq 1$$

se verifican para todo $i \in \mathbb{Z}$, donde $P_1^{k,r}(i) = \{j \in [k,r] : p(i+j) = 1\}$ y $P_2^{k,r}(i) = \{j \in [k,r] : p(i+j) > 1\}$.

Promedios ergódicos Cesàro-α

$$R_{n,\alpha}f(x) = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{i=0}^{n} A_{n-i}^{\alpha-1} f(T^i x)$$

con $0 < \alpha \leq 1$, y los números de Cesàro definidos como

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{n!} \quad \text{y} \quad A_n^0 = 1.$$

Promedios ergódicos Cesàro-α

$$R_{n,\alpha}f(x) = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{i=0}^{n} A_{n-i}^{\alpha-1} f(T^i x)$$

con $0 < \alpha \leq 1$, y los números de Cesàro definidos como

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{n!} \quad \text{y} \quad A_n^0 = 1.$$

Operador maximal ergódico Cesàro-α

$$M_{T,\alpha}^{+} f = \sup_{n\in\mathbb{N}} |R_{n,\alpha} f|.$$

Teorema 5

Sean

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito
- $p : X \to [1, \infty)$
- $T : X \to X$ una transformación inversible que preserva la medida
- u, v funciones medibles positivas sobre X.

Consideremos las siguientes afirmaciones:

a) Existe $C > 0$ tal que la desigualdad

$$\int_{\{x \in X : M^{+}_{T,\alpha} f(x) > \lambda\}} u d\mu \leq \int_X \left(\frac{C|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} v(x) d\mu$$

se verifica para toda f y para todo $\lambda > 0$.

b) El par (u, v) verifica la condición $A^{+}_{p(\cdot),\alpha}(T)$.

Entonces $b) \Rightarrow a)$ y, si T es ergódica, se verifica la equivalencia.

Clases $A^{+}_{p(\cdot),\alpha}(T)$

Diremos que un par de funciones medibles positivas (u, v) en X verifican la condición $A^{+}_{p(\cdot),\alpha}(T)$ si existe $C > 0$ tal que para todo $0 \leq k \leq r$ se verifican

$$\sum_{j \in P_2^{k,r}(x)} \left(\frac{A_{r-j}^{\alpha-1}}{CA_r^{\alpha}} \right)^{p'(T^j x)} \left(\frac{\sum_{i=0}^{k} u(T^i x)}{v(T^j x)} \right)^{p'(T^j x)-1} \leq 1$$

y

$$\frac{1}{CA_r^{\alpha}} \left(\max_{j \in P_1^{k,r}(x)} v^{-1}(T^j x) A_{r-j}^{\alpha-1} \right) \sum_{j=0}^{k} u(T^j x) \leq 1$$

para casi todo $x \in X$, donde $P_1^{k,r}(x) = \{j \in [k, r] : p(T^j x) = 1\}$ y $P_2^{k,r}(x) = \{j \in [k, r] : p(T^j x) > 1\}$.

Clases $A^+_{p(\cdot),\alpha}(T)$

Diremos que un par de funciones medibles positivas (u,v) en X verifican la condición $A^+_{p(\cdot),\alpha}(T)$ si existe $C>0$ tal que para todo $0\le k\le r$ se verifican

$$\sum_{j\in P_2^{k,r}(x)} \left(\frac{A^{\alpha-1}_{r-j}}{CA^{\alpha}_{r}}\right)^{p'(T^jx)} \left(\frac{\sum_{i=0}^{k} u(T^ix)}{v(T^jx)}\right)^{p'(T^jx)-1} \le 1$$

y

$$\frac{1}{CA^{\alpha}_{r}}\left(\max_{j\in P_1^{k,r}(x)} v^{-1}(T^jx)A^{\alpha-1}_{r-j}\right)\sum_{j=0}^{k} u(T^jx)\le 1$$

para casi todo $x\in X$, donde $P_1^{k,r}(x)=\{j\in[k,r]:p(T^jx)=1\}$ y $P_2^{k,r}(x)=\{j\in[k,r]:p(T^jx)>1\}$.

OBS: $(u,v)\in A^+_{p(\cdot),\alpha}(T)\iff(u^x,v^x)\in A^+_{p(\cdot),\alpha}(\mathbb{Z})$ para casi todo $x\in X$, con constante independiente de x, donde u^x, v^x, p^x son las funciones definidas en los enteros por $u^x(i)=u(T^ix)$, $v^x(i)=v(T^ix)$ y $p^x(i)=p(T^ix)$.

Idea de la demostración

Idea de la demostración

Para demostrar $b) \Rightarrow a)$:

- Se define $M^{+}_{T,\alpha,N}f(x) = \sup_{0\leq n\leq N} \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{i=0}^{n} \left| A_{n-i}^{\alpha-1} f(T^i x) \right|$.

Idea de la demostración

Para demostrar $b) \Rightarrow a)$:

- Se define $M^+_{T,\alpha,N}f(x) = \sup_{0\le n\le N} \frac{1}{A^\alpha_n}\sum_{i=0}^{n}\left|A^{\alpha-1}_{n-i}f(T^i x)\right|.$
- Para $x \in X$ fijo, con $f^x(i) = f(T^i x)$, se tiene

$$M^+_{T,\alpha,N}f(T^i x) \le m^+_\alpha(f^x\chi_{[0,N+L]})(i).$$

Usando la obs, el Teorema 4 y haciendo $N \longrightarrow \infty$ se obtiene el resultado.

Idea de la demostración

Para demostrar $b) \Rightarrow a)$:

- Se define $M^{+}_{T,\alpha,N}f(x) = \sup_{0\leq n\leq N} \frac{1}{A^{\alpha}_n} \sum_{i=0}^{n} \left|A^{\alpha-1}_{n-i} f(T^i x)\right|.$
- Para $x \in X$ fijo, con $f^x(i) = f(T^i x)$, se tiene

$$M^{+}_{T,\alpha,N}f(T^i x) \leq m^{+}_{\alpha}(f^x \chi_{[0,N+L]})(i).$$

  Usando la obs, el Teorema 4 y haciendo $N \longrightarrow \infty$ se obtiene el resultado.

Para probar $a) \Rightarrow b)$ se usan las propiedades de ergodicidad de T.

Como consecuencia, se prueba la convergencia de la sucesión $\{R_{n,\alpha} f\}$ para toda $f \in L^{p(\cdot)}(wd\mu)$.

Teorema 6

Sean

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito
- $p : X \to [1, \infty)$ una función medible tal que $\sup_{x \in X} p(x) < \infty$
- $T : X \to X$ un operador Lamperti inversible que preserva la medida
- w una función medible positiva para la cual existe u tal que $(u, w) \in A^{+}_{p(\cdot),\alpha}(T)$.

Entonces la sucesión $\{R_{n,\alpha} f\}$ converge en ctp para toda $f \in L^{p(\cdot)}(wd\mu)$.

Idea de la demostración

Idea de la demostración

- $\sup_{x\in X} p(x) < \infty \Rightarrow \; S_0 = \{f \in S : \mu(sop(f)) < \infty\}$ es denso en $L^{p(\cdot)}(d\mu)$.

Idea de la demostración

- $\sup\limits_{x\in X} p(x) < \infty \Rightarrow \; S_0 = \{f \in S : \mu(sop(f)) < \infty\}$ es denso en $L^{p(\cdot)}(d\mu)$.
- $D = L^1(d\mu) \cap L^{p(\cdot)}(wd\mu)$ es denso en $L^{p(\cdot)}(wd\mu)$.

Idea de la demostración

- $\sup_{x\in X} p(x) < \infty \Rightarrow \; S_0 = \{f \in S : \mu(sop(f)) < \infty\}$ es denso en $L^{p(\cdot)}(d\mu)$.
- $D = L^1(d\mu) \cap L^{p(\cdot)}(wd\mu)$ es denso en $L^{p(\cdot)}(wd\mu)$.
- T es un operador Lamperti

Idea de la demostración

- $\sup_{x\in X} p(x) < \infty \Rightarrow\ S_0 = \{f \in S : \mu(sop(f)) < \infty\}$ es denso en $L^{p(\cdot)}(d\mu)$.
- $D = L^1(d\mu) \cap L^{p(\cdot)}(wd\mu)$ es denso en $L^{p(\cdot)}(wd\mu)$.
- T es un operador Lamperti
- Convergencia en ctp en D (MR-SG)

Idea de la demostración

- $\sup\limits_{x\in X} p(x) < \infty \Rightarrow S_0 = \{f \in S : \mu(sop(f)) < \infty\}$ es denso en $L^{p(\cdot)}(d\mu)$.
- $D = L^1(d\mu) \cap L^{p(\cdot)}(wd\mu)$ es denso en $L^{p(\cdot)}(wd\mu)$.
- T es un operador Lamperti
- Convergencia en ctp en D (MR-SG)
- $M^+_{T,\alpha}$ es de tipo débil en D

Idea de la demostración

- $\sup_{x \in X} p(x) < \infty \Rightarrow \; S_0 = \{f \in S : \mu(sop(f)) < \infty\}$ es denso en $L^{p(\cdot)}(d\mu)$.
- $D = L^1(d\mu) \cap L^{p(\cdot)}(wd\mu)$ es denso en $L^{p(\cdot)}(wd\mu)$.
- T es un operador Lamperti
- Convergencia en ctp en D (MR-SG)
- $M^+_{T,\alpha}$ es de tipo débil en D

Entonces $\{R_{n,\alpha} f\}$ converge en ctp para toda $f \in L^{p(\cdot)}(wd\mu)$.

Idea de la demostración

- $\sup_{x\in X} p(x) < \infty \Rightarrow \; S_0 = \{f \in S : \mu(sop(f)) < \infty\}$ es denso en $L^{p(\cdot)}(d\mu)$.
- $D = L^1(d\mu) \cap L^{p(\cdot)}(wd\mu)$ es denso en $L^{p(\cdot)}(wd\mu)$.
- T es un operador Lamperti
- Convergencia en ctp en D (MR-SG)
- $M^{+}_{T,\alpha}$ es de tipo débil en D

Entonces $\{R_{n,\alpha} f\}$ converge en ctp para toda $f \in L^{p(\cdot)}(wd\mu)$.

Corolario

Si $\sup_{x\in X} p(x) < \infty$ y $w \in A^{+}_{p(\cdot),\alpha}(T)$, entonces la sucesión $\{R_{n,\alpha} f\}$ converge en ctp para toda $f \in L^{p(\cdot)}(wd\mu)$.

Referencias

- Martín-Reyes, F. J.: Sarrión Gavilán, M. D. *Almost everywhere convergence and boundedness of Cesàro-α ergodic averages*. Illinois Journal of Mathematics, 43, (1999), 592-611.
- Martín-Reyes, F. J.; De la Torre, A. *Some weighted inequalities for general one-sided maximal operators*. Studia Math, 122, (1997), 1-14.
- Aguilar Cañestro, M. I.; Ortega Salvador, P. *Weighted weak type inequalities with variable exponents for Hardy and maximal operators*. Proc. Japan Acad., 82, Ser. A (2006), 126-130.
- Aguilar Cañestro, M. I.; Ortega Salvador, P. *Weak-type inequalities and convergence of the ergodic averages in variable Lebesgue spaces with weights*. Proc. Royal Soc. Edinb., 139A, (2009), 673-683.

MUCHAS GRACIAS!!!